Algèbre 6 - Matrices et applications linéaires

NB : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie dans ce cours les éléments de $\mathbb{K}^n$ et les colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1 Représentations matricielles des AL

On fixe E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p \in \mathbb{N}$, et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Rappel : Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, et si $x \in E$, le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

où les $x_i \in \mathbb{K}$ sont tels que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$.

Notation. *On utilisera dans ce cours la notation simplifiée :*

$$\boldsymbol{[x]_{\mathcal{E}} := Mat_{\mathcal{E}}(x)}$$

Exemple : On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère deux bases : $\mathrm{Can} = (1, X, X^2)$, et $\mathcal{B} := (X^2, 1+X, 1+X^2)$ (on admet que $\mathcal{B}$ est une base).

Soit $P = 6X^2 + X + 3$. Calculons $[P]_{\mathrm{Can}}$ et $[P]_{\mathcal{B}}$.

- On a $[P]_{\mathrm{Can}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.
- Notons $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} := [P]_{\mathcal{B}}$. Par définition, on a : $P = \lambda_1 X^2 + \lambda_2(1+X) + \lambda_3(1+X^2)$, c-à-d :

$$6X^2 + X + 3 = (\lambda_1 + \lambda_3)X^2 + \lambda_2 X + (\lambda_2 + \lambda_3).$$

Par identification des coefficients, on a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 &= 6 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \end{cases}, \qquad \text{c-à-d} \qquad \begin{cases} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 2 \end{cases}.$$

Ainsi, $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Remarque. *L'application* $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & [x]_{\mathcal{E}} \end{array}$ *est :*

- *linéaire :* $[\lambda x + \mu y]_{\mathcal{E}} = \lambda [x]_{\mathcal{E}} + \mu\, [y]_{\mathcal{E}}$
- *bijective.*

Autrement dit, il s'agit d'un **isomorphisme**.

Conséquence : De nombreuses questions portant sur les vecteurs de E peuvent se traduire sur les vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^p$.

Exemples :

- (x et y sont colinéaires dans E) $\iff$ ($[x]_{\mathcal{E}}$ et $[y]_{\mathcal{E}}$ sont colinéaires dans $\mathbb{K}^p$).
- $x \in \mathrm{Vect}(y, z) \iff [x]_{\mathcal{E}} \in \mathrm{Vect}\left([y]_{\mathcal{E}}, [z]_{\mathcal{E}}\right)$.
- $\mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{rg}\left([x_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [x_k]_{\mathcal{E}}\right)$.

Théorème/définition.
Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $x \in E$,

$$[\boldsymbol{\varphi(x)}]_{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \boldsymbol{A} \times [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (\star)$$

Autrement dit : l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ *est représentée par* $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

Cette matrice est appelée **matrice représentative de $\boldsymbol{\varphi}$ dans les bases $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}$**. *On la note $Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$, ou $(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.*

De plus, elle vaut :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [\varphi(e_1)]_{\mathcal{F}} & \cdots & [\varphi(e_p)]_{\mathcal{F}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur $\varphi(e_j)$ dans la base $(f_1, \dots, f_n)$.

$\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \dots\ \varphi(e_p)$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$A =$ (colonnes) $\dots$

$\leftarrow$ coord /. à f_1

$\leftarrow$ coord /. à f_2

$\vdots$

$\leftarrow$ coord /. à f_n

Démonstration.

- Pour l'existence de A, vérifions que la matrice définie ci-dessus vérifie bien $[\varphi(x)]_{\mathcal{F}} = A\,[x]_{\mathcal{E}}$, pour tout $x \in E$.

  Fixons $x \in E$ et notons $[x]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$.
  Par définition, on a $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$.
  Donc, $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_p\varphi(e_p)$ (par linéarité).
  Donc : $[\varphi(x)]_{\mathcal{F}} = x_1\,[\varphi(e_1)] + \dots + x_p\,[\varphi(e_p)]_{\mathcal{F}}$.
  Or, c'est exactement ce que l'on obtient en faisant :

$$A\,[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [\varphi(e_1)]_{\mathcal{F}} & \cdots & [\varphi(e_p)]_{\mathcal{F}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1\,[\varphi(e_1)]_{\mathcal{F}} + \ldots + x_p\,[\varphi(e_p)]_{\mathcal{F}}$$

- Pour l'unicité de A, s'il existe deux matrices A et B qui vérifient $(\star)$, alors :

$$\forall x \in E, \quad [\varphi(x)]_{\mathcal{F}} = A\,[x]_{\mathcal{E}} = B\,[x]_{\mathcal{E}}$$

  Or, lorsque x parcourt E, $[x]_{\mathcal{E}}$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{K}^p$. On en déduit :

$$\forall X \in \mathbb{K}^p, \quad AX = BX$$

Or, on sait qu'une matrice est entièrement caractérisée par la façon dont elle agit par multiplication à gauche sur les vecteurs colonne (voir chapitre sur les matrices du semestre 1). D'où $A = B$.

$\square$

Exemple : On considère $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

On pose $\mathcal{E} := (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{F} := (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

- Calculons $A := (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.
  - $\varphi(1) = 0$, donc $[\varphi(1)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
  - $\varphi(X) = 1$, donc $[\varphi(X)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
  - $\varphi(X^2) = 2X$, donc $[\varphi(1)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

  Ainsi, la matrice A vaut :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /\ 1 \\ /\ X \end{array}$$

  Vérifions le théorème pour $P = 6X^2 + X + 3$. On a d'une part $\varphi(P) = 12X + 1$.

  D'autre part, $[P]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, donc

$$A\,[P]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Soit $\mathcal{B} = (X^2, 1 + X, 1 + X^2)$. Calculons $\widetilde{A} := (\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$.
  - $\varphi(X^2) = 2X$, donc $\left[\varphi(X^2)\right]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
  - $\varphi(1 + X) = 1$, donc $[\varphi(1 + X)]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
  - $\varphi(1 + X^2) = 2X$, donc $\left[\varphi(1 + X^2)\right]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

  Ainsi, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  Vérifions le théorème pour $P = 6X^2 + X + 3$. On a $\varphi(P) = 12X + 1$. Par ailleurs, on avait vu que $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

  Ainsi, $\widetilde{A}\,[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Remarques.

- *Quelles que soient les bases choisies, la matrice qui représente l'endomorphisme nul est la matrice nulle.*
- *Un endomorphisme remarquable de tout espace E est l'endomorphisme identité Id_E. Si l'on se fixe la **même base** $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ au départ et à l'arrivée, alors la matrice qui représente Id_E est la matrice identité. Autrement dit, pour toute base $\mathcal{B}$ de E :*

$$\boldsymbol{(Id_E)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n}$$

En effet, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} Id_E(e_k) &= e_k \\ &= \mathbf{0}.e_1 + \cdots + \mathbf{0}.e_{k-1} + \mathbf{1}.e_k + \mathbf{0}.e_{k+1} + \cdots + \mathbf{0}.e_n \end{aligned}$$

Donc la k-ième colonne de $(Id_E)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est précisément le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire la k-ième colonne de I_n.
En revanche, si ce n'est pas la même base choisie au départ et à l'arrivée, la matrice qui représente l'endomorphisme identité ne vaut pas I_n.

Propositions.

1. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Posons $A := (u)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ et $B := (v)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Alors :*

$$\boldsymbol{(\lambda u + \mu v)_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \lambda A + \mu B}$$

2. *Considérons la situation suivante :*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{v} & F & \xrightarrow{u} & G \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{base } \mathcal{E} & & \text{base } \mathcal{F} & & \text{base } \mathcal{G} \end{array}$$

On pose $A = (u)_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ et $B = (v)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Alors on a :

$$\boldsymbol{(u \circ v)_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = A \times B}$$

3. *Dans le cas où $n = p$, si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A := (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, on a l'équivalence :*

$$\boldsymbol{(\varphi \text{ isomorphisme}) \iff (A \text{ inversible})},$$

et dans ce cas, $\boldsymbol{\left(\varphi^{-1}\right)_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = A^{-1}}$.

Démonstration.

1. Notons $C := (\lambda u + \mu v)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Montrons $C = \lambda A + \mu B$. Soit $X \in \mathbb{K}^p$ et soit $x \in E$ tel que $[x]_{\mathcal{E}} = X$.

$$CX = [(\lambda u + \mu v)(x)]_{\mathcal{F}} = [\lambda u(x) + \mu v(x)]_{\mathcal{F}} = \lambda [u(x)]_{\mathcal{F}} + \mu [v(x)]_{\mathcal{F}} = \lambda AX + \mu BX = (\lambda A + \mu B)X$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^p$, $C = \lambda A + \mu B$.

2. Notons $C := (u \circ v)_{\mathcal{E},\mathcal{G}}$. Montrons $C = A \times B$. Soit $X \in \mathbb{K}^p$ et soit $x \in E$ tel que $[x]_{\mathcal{E}} = X$.

$$CX = [u \circ v(x)]_{\mathcal{G}} = [u(v(x))]_{\mathcal{G}} = A[(v(x)]_{\mathcal{F}} = A(B[x]_{\mathcal{E}}) = ABX$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^p$, $C = AB$.

3. ▶ Montrons ($\Leftarrow$). Supposons A inversible. Montrons que φ est un isomorphisme. Comme on est en dimension finie avec $p = n$, on sait qu'il suffit de démontrer que $\ker(\varphi) = \{0_E\}$.
Soit $x \in \ker(\varphi)$ et $X := [x]_{\mathcal{E}}$. On a $\varphi(x) = 0_E$, donc $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on a $X = 0_{\mathbb{K}^n}$ et donc $x = 0_E$.
Conclusion : $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ et donc φ est un isomorphisme.
▶ Montrons ($\Rightarrow$). Supposons que φ est un isomorphisme et notons $B := \left(\varphi^{-1}\right)_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ la matrice qui représente sa réciproque (avec le même couple de bases).
On a

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$$

donc utilisant la proposition précédente, on a

$$AB = (\mathrm{Id}_F)_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = I_n \qquad \text{et de même} \qquad BA = I_n.$$

Conclusion : A est inversible et $B = A^{-1}$, ce qui signifie bien que $\left(\varphi^{-1}\right)_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = A^{-1}$.

□

Remarque. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \end{array}$$

est :

- *linéaire (premier point de la propriété précédente) ;*
- *bijective (caractérisation des AL par l'image d'une base).*

C'est donc un isomorphisme.

Conséquence : les ev $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont même dimension, c-à-d $n \times p$. Autrement dit,

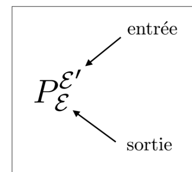
$$\mathbf{dim}\,(\boldsymbol{\mathcal{L}(E,F)}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) \times \mathbf{dim}(\boldsymbol{F})$$

2 Changements de bases

Théorème/définition. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.*

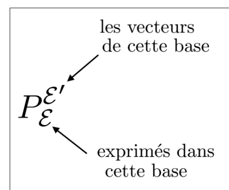
Il existe une unique matrice $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad [x]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \times [x]_{\mathcal{E}'} \qquad (\star)$$



De plus, cette matrice vaut :

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [e'_1]_{\mathcal{E}} & \cdots & [e'_n]_{\mathcal{E}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$



Autrement dit, la j-ième colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \overset{e'_1}{\downarrow} & \overset{e'_2}{\downarrow} & \cdots & \overset{e'_n}{\downarrow} \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ coord /. à } e_1 \\ \leftarrow \text{ coord /. à } e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{ coord /. à } e_n \end{matrix}$$

Cette matrice s'appelle une **matrice de passage**.

Démonstration.

- Pour l'existence, il suffit de montrer que la matrice définie ci-dessus vérifie $(\star)$.

  Soit $x \in E$. On note $[x]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$. On a par définition : $x = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n$, donc

$$[x]_{\mathcal{E}} = x'_1 [e'_1]_{\mathcal{E}} + \cdots + x'_n [e'_n]_{\mathcal{E}}$$

  Or, c'est exactement ce qu'on obtient en faisant le produit : $\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [e'_1]_{\mathcal{E}} & \cdots & [e'_n]_{\mathcal{E}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

  Donc on a bien $[x]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} [x]_{\mathcal{E}'}$.

- Unicité : si deux matrices P_1 et P_2 vérifient : $\forall x \in E$, $[x]_{\mathcal{E}} = P_1 [x]_{\mathcal{E}'} = P_2 [x]_{\mathcal{E}'}$, alors :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \; P_1 X = P_2 X, \quad \text{et donc} \quad P_1 = P_2$$

□

Exercice d'application. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et posons $\mathcal{E} := \text{Can} = (1, X, X^2)$, et $\mathcal{E}' := (X^2, 1+X, 1+X^2)$.

1. **Déterminer $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ et $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$.**

Démonstration.

▶ Tout d'abord, $\left[X^2\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $[1+X]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\left[1+X^2\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donc $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▶ Déterminons $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$.

- Posons $[1]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Par définition, on a

$$1 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2(1+X) + \lambda_3(1+X^2) = (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2 X + (\lambda_1 + \lambda_3)X^2$$

Donc :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases}, \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & -1 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 1 \end{cases}$$

Donc $[1]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Posons $[X]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. De même que précédemment, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases}, \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_3 & = & -1 \end{cases}$$

Donc $[X]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- On a $[X^2]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, puisque X^2 est l'un des trois vecteurs de la base $\mathcal{E}'$.

Finalement, $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

2. **Soit $Q = 6X^2 + X + 3$. Retrouver $[Q]_{\mathcal{E}'}$ à l'aide du travail précédent.**

Démonstration. On a $[Q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, donc

$$[Q]_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \times [Q]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

Théorème. *Dans les mêmes notations que le théorème/définition précédent,* $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ *et* $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ *sont inversibles, et*

$$\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$$

Démonstration. Soit $X \in \mathbb{K}^n$. Soit $x \in E$ tel que $[x]_{\mathcal{E}} = X$. On note $X' := [x]_{\mathcal{E}'}$.
D'après le théorème/définition, on a :

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \underbrace{P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} X}_{=X'} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} X' = X$$

Ainsi, $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right) X = (I_n)X$ (autrement dit, la matrice $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right)$ agit sur les vecteurs colonnes comme le fait la matrice I_n).
Ceci étant valable pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, donc $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}\right) = I_n$. De façon symétrique, $\left(P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right) = I_n$. □

Théorème (Formule de changement de base pour un endomorphisme)**.**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie. Soit* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ *deux bases de* E*. On note*

$$P := P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \qquad \textit{(matrice de passage)}$$

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$*, et*

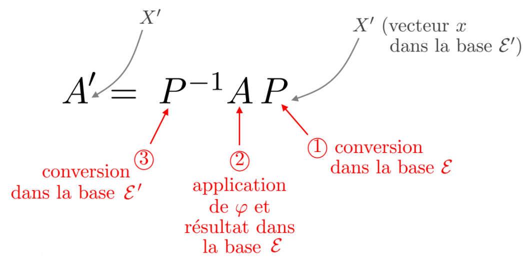
$$A := (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \qquad \textit{et} \qquad A' := (\varphi)_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'}$$

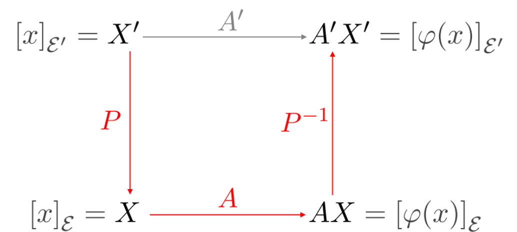
(matrices qui représentent φ *dans deux bases différentes)*

alors :

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}AP}$$

car les deux matrices (A' *d'une part, et* $P^{-1}AP$ *d'autre part) représentent toutes les deux* φ *dans le couple de bases* $(\mathcal{E}', \mathcal{E}')$ *:*





Autrement dit :

$$(\varphi)_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \ (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \ P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

Proposition (Formule de changement de base pour une AL quelconque)**.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E, et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F. On note

$$P := P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \qquad \text{et} \qquad Q := P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \qquad \text{(matrices de passage)}$$

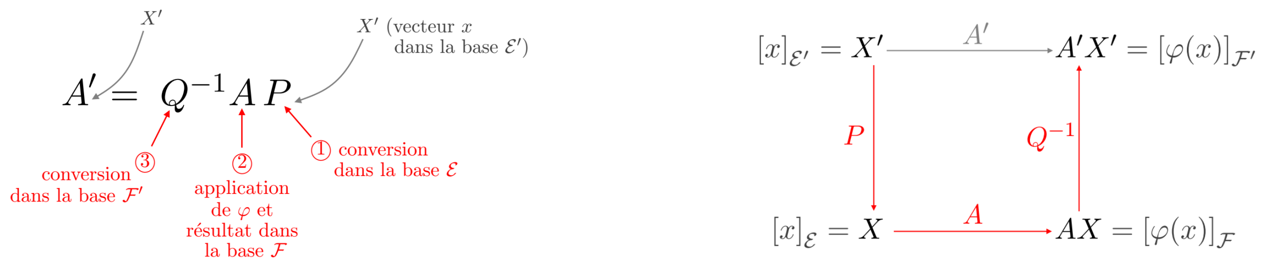
Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et

$$A := (\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad A' := (\varphi)_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} \qquad \text{(matrices qui représentent } \varphi)$$

alors :

$$\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$$

car les deux matrices (A' d'une part, et $Q^{-1}AP$ d'autre part) représentent toutes les deux φ dans le couple de bases $(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$:



Remarques.

- *Si $A' = P^{-1}AP$, alors en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient $PA'P^{-1} = A$.*
- *L'opération « $P^{-1} \times (\dots) \times P$ » est compatible avec la somme, au sens où l'on a : :*

$$\left(P^{-1}AP\right) + \left(P^{-1}BP\right) = P^{-1}\left(A+B\right)P \qquad \text{(simple développement/factorisation)}$$

et aussi (et surtout) avec le produit, car :

$$\left(P^{-1}AP\right) \times \left(P^{-1}BP\right) = P^{-1}\left(AB\right)P \qquad \text{(simplification } PP^{-1} \text{ au milieu)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left(P^{-1}AP\right)^n &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\dots\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\\ &= P^{-1}A \times A \times A \times \dots \times A \times AP\\ &= P^{-1}A^nP\end{aligned}$$

Conséquence : Si $A' = P^{-1}AP$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A')^n = P^{-1}A^nP$.

Définition. *Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A et A' sont **semblables** *s'il existe P inversible telle que : $A' = P^{-1}AP$.*

Moralement, cela signifie que A et A' représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Dans $\mathbb{K}^n$, si on note $\mathrm{Can} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un vecteur, on a :

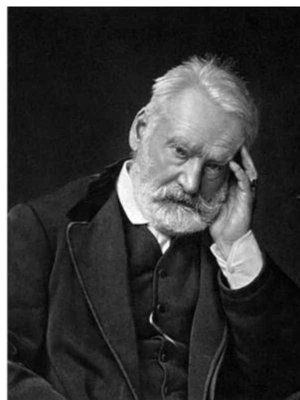
$$[x]_{\mathrm{Can}} = x$$

car :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

ce qui montre bien que les coordonnées de x dans la base canonique sont $(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire x.

”La représentation dans la base canonique d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$, c'est lui-même.”



Théorème/définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'AL canoniquement associée à A est définie par :*

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Dans cette situation, la matrice qui représente φ_A dans les bases canoniques (notées can_p pour $\mathbb{K}^p$ et can_n pour $\mathbb{K}^n$) est alors A elle-même. *Autrement dit :*

$$(\varphi_A)_{can_p, can_n} = A$$

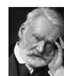
Démonstration. Pour tout $X \in \mathbb{K}^p$,

$$\varphi_A(X) = AX$$

ce que l'on peut réécrire :

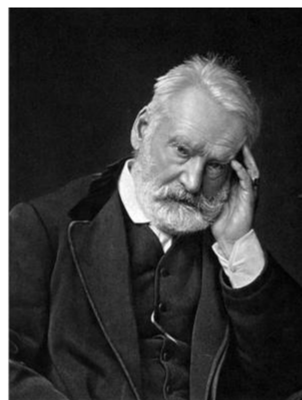
$$[\varphi_A(X)]_{\mathrm{can}_n} = A\,[X]_{\mathrm{can}_p} \quad \text{car :}$$

”La représentation dans la base canonique d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$, c'est lui-même.”



Cela montre bien que A représente φ_A dans les bases canoniques, puisque dans ces bases, appliquer φ_A revient à multiplier par la matrice A. □

”La matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice A, c'est A.”



Remarque. *Comme A représente φ_A dans les bases canoniques,* ***les colonnes de A*** *sont les $\varphi_A(e_i)$ (où $(e_1, \ldots, e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^p$), eux-mêmes exprimés dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire les* $\boldsymbol{\varphi_A(e_i)}$ *tout court :*

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_A(e_1) & \ldots & \varphi_A(e_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

Les colonnes d'une matrice expriment l'image de la base canonique par cette matrice.

On savait en fait déjà cela, puisque si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ *alors :*

$$\varphi_A(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = (\text{première colonne de } A)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_A(e_p) = Ae_p = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} = (p\text{-ième colonne de } A)$$

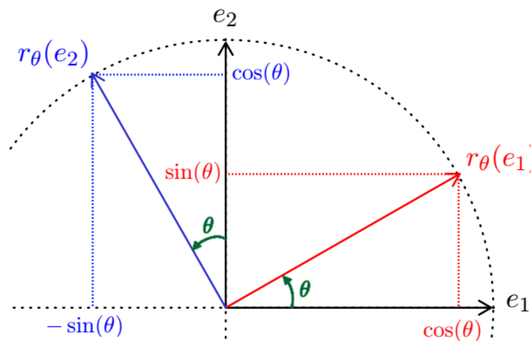
Exemples fondamentaux :

- Dans $\mathbb{K}^n$, l'endomorphisme **identité** $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ est canoniquement associé à $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  On retrouve l'interprétation des colonnes, puisque chaque e_i est envoyé sur lui-même.

- De façon générale, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'**homothétie** de $\mathbb{K}^n$: $X \mapsto \lambda X$ est canoniquement associée à la matrice $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, notons, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, r_θ la **rotation** autour de l'origine d'angle θ.



r_θ est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice R_θ suivante :

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Les matrices R_θ sont appelées **matrices de rotations**.

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Déterminons $r_\theta(X)$.
Posons le nombre complexe $z_X := x + iy$, l'affixe de X. Dans $\mathbb{C}$, appliquer la rotation d'angle θ revient à multiplier par $e^{i\theta}$. Or :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z_X &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x + iy) \\ &= \big(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y\big) + i\big(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y\big) \end{aligned}$$

D'où, en revenant dans $\mathbb{R}^2$, puis en reconnaissant un produit matriciel :

$$r_\theta(X) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta . X$$

□

Définition. *Le* **noyau** *et l'***image** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont définis par :*

- $\ker(A) := \ker(\varphi_A) = \left\{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Im}(\varphi_A) = \{Y \in \mathbb{K}^n \mid \exists X \in \mathbb{K}^p \text{ tq } Y = AX\}$

Remarques.

1. *Les lignes de A donnent un système d'équations de* $\ker(A)$.
2. *On sait que* $\mathrm{Im}(A) = Vect(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_p))$. *Or, comme on l'a vu, les $\varphi_A(e_i)$ sont les colonnes de A. Conclusion :* ***$\mathrm{Im}(A)$ est engendrée par les colonnes de A.***
3. *Par le théorème du rang, on a*

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = p \quad \leftarrow \textit{nb de colonnes, car dim de } \mathbb{K}^p\textit{, espace de départ}$$

Propriétés.

1. *Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ conservent l'image.*
2. *Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ conservent le noyau.*

Démonstration.
Soit F une matrice d'opération élémentaire. On sait que réaliser cette opération sur les lignes revient à multiplier la matrice A à gauche par F.

De façon similaire, on peut montrer (simple vérification) que réaliser l'opération élémentaire sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par F.

1. Raisonnons par double inclusion.
Soit $Y \in \text{Im}(AF)$. Alors, il existe $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = AFX = A\,(FX)$. Donc $Y \in \text{Im}(A)$.
Réciproquement, soit $Y \in \text{Im}(A)$. Alors, il existe $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = AX = AF\left(F^{-1}X\right)$.
On en déduit que $Y \in \text{Im}(AF)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a pour tout $X \in \mathbb{K}^p$ les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) \iff AX = 0 &\iff FAX = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{équivalence conservée car } F \text{ est inversible} \\ &\iff X \in \ker(FA) \end{aligned}$$

Ces équivalences montrent que $\ker(A) = \ker(FA)$.

□

Théorème/définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Les deux entiers :*

- *$r_1 =$ le rang de l'AL φ_A, c-à-d $\dim\left(\text{Im}(\varphi_A)\right)$,*
- *$r_2 =$ le rang de la famille de vecteurs $(\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_p))$, c-à-d le rang des colonnes de A,*

sont tous deux égaux. Cet entier s'appelle le **rang de A**, *noté* $\text{rg}(A)$.

En outre, si une AL φ est représentée par la matrice A (dans un certain couple de bases), alors :

$$\mathbf{rg}(\varphi) = \mathbf{rg}(A)$$

Démonstration. Commençons par montrer l'égalité $r_1 = r_2$.
On sait que $\text{Im}\,(\varphi_A) = \text{Vect}\,(\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_p))$, donc :

$$r_1 = \dim\left(\text{Im}(\varphi_A)\right) = \dim\left(\text{Vect}(\varphi_A(e_1), \ldots, \varphi_A(e_p)\right) = r_2$$

Considérons $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un ev de dimension finie p et F est un ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et $\mathcal{F}$ une base de F. Si $(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A$, alors :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(\varphi)) = rg(\varphi) &= \dim\left(\text{Vect}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)\right) \\ &= \text{rg}\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)\right) \\ &= \text{rg}\left([\varphi(e_1)]_{\mathcal{F}}, \ldots, [\varphi(e_p)]_{\mathcal{F}}\right) \\ &= \text{rg}(A). \end{aligned}$$

□

Conséquences :

1. Les propriétés du rang sur les AL se transposent aux matrices :
   - Théorème du rang : $\dim(\ker(A)) + \text{rg}(A) = p$
   - $\text{rg}(A) \leqslant p$; et $\text{rg}(A) \leqslant n$, où p, resp. n, correspond au nombre de colonnes, resp. de lignes, de A.
   - $\text{rg}(AB) \leqslant \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(AB) \leqslant \text{rg}(B)$.
2. Le rang d'une matrice est conservé par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.
En effet, en terme d'AL, cela correspond à composer par un isomorphisme.

3. Si $p = n$ (autrement dit, si A est une matrice carrée), on a équivalence entre :
   - A inversible (c-à-d φ_A est bijective) ;
   - $\ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$;
   - $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$;
   - $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi_A) = n$, ce qui signifie que les colonnes de A sont libres, ou encore, que ses colonnes sont génératrices de $\mathbb{K}^n$.

Théorème. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$, et donc, A et B sont inversibles, et $A^{-1} = B$ (et $B^{-1} = A$).

Démonstration. On sait déjà que, en dimension finie, cette propriété est vraie pour les endomorphismes.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Donc $\varphi_A \circ \varphi_B = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$; ainsi, $\varphi_B \circ \varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, ce qui donne $BA = I_n$. Ainsi, A est bien inversible, et $A^{-1} = B$. □

4 Calculs de rang

Comme on l'a vu, le rang d'une matrice (dimension de son image) est égal au rang de ses **colonnes**, vues comme une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

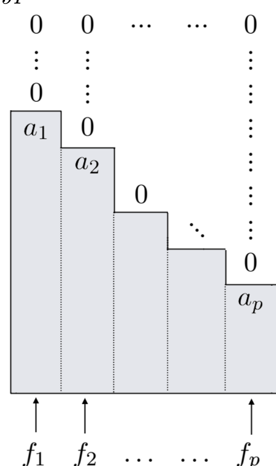
Théorème. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*

$$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$$

Démonstration. Officiellement hors programme, car un peu délicate. Pour les curieux, une façon de faire est proposée à la fin de ce document. □

Conséquence : (C1) Le rang des lignes d'une matrice est égal au rang de ses colonnes.

Théorème/définition. *Dans $\mathbb{K}^n$, une famille de vecteurs $f_1, \dots, f_p$ est dite* **échelonnée** *si elle est du type :*



Les $a_1, \dots, a_p$ sont non nuls (on les appelle les ***pivots****), et le nombre de 0 au-dessus des a_i est strictement croissant.*

Le théorème est le suivant : une telle famille est **libre**.

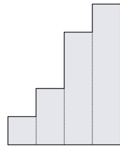
Démonstration. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0_{\mathbb{K}^n}$.
On écrit uniquement les lignes où apparaissent les pivots $a_1, \dots, a_p$:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + & & & = 0 \\ \lambda_1 \boxed{\star} + & \lambda_2 a_2 + & & = 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 \boxed{\star} + & \lambda_2 \boxed{\star} + & \cdots \quad \lambda_p a_p & = 0 \end{cases}$$

La première ligne donne $\lambda_1 = 0$, car $a_1 \neq 0$. La deuxième ligne donne de même $\lambda_2 = 0$, etc ; jusqu'à la p-ième ligne, qui donne $\lambda_p = 0$. □

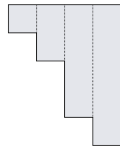
Remarques.

1. *On parle aussi de famille échelonnée (et on a également le caractère libre) pour une famille du type :*

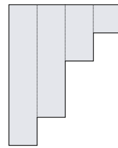


En effet, changer l'ordre des vecteurs ne change pas leur rang.

2. *Idem pour les familles du type :*



ou



(simple adaptation de la preuve)

Pour se ramener au cas précédent, on peut également remarquer que « retourner verticalement » les vecteurs $f_1, \dots, f_p$ revient à leur appliquer la matrice $M = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$. Or, M est inversible, donc φ_M est un isomorphisme. Donc appliquer φ_M à une famille de vecteurs ne change pas son rang.

Conséquence : (C2) Si une matrice est composée de p colonnes échelonnées et de colonnes nulles, alors son rang vaut p, c-à-d le nombre de pivots.

Démonstration. Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de la matrice échelonnée A, de sorte que

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p, 0, \dots, 0) \qquad \leftarrow \text{rang d'une famille de vecteurs} \\ &= \operatorname{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p) \\ &= p \qquad \leftarrow \text{des vecteurs échelonnés sont libres} \end{aligned}$$

□

Rappel : le rang d'une matrice A est invariant par produit à gauche ou à droite par une matrice inversible.

Conséquence : (C3) Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang.

Démonstration. En effet, cela revient à multiplier à gauche ou à droite par une matrice d'opération élémentaire, que l'on sait être inversible. □

Conséquence des conséquences C1, C2 et C3 : Une méthode classique pour déterminer le rang d'une matrice est d'effectuer des opérations élémentaires (sur les lignes ou sur les colonnes) de façon à l'échelonner, en lignes ou en colonnes. Le rang est alors le nombre de pivots.

$$\begin{pmatrix} \boxtimes & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \boxtimes & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & 0 & \boxtimes & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \boxtimes & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Appendice hors programme : démonstration de $\mathbf{rg}(A^T) = \mathbf{rg}(A)$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\varphi := \varphi_A$ l'AL qui lui est canoniquement associée. On note r son rang. Considérons H un supplémentaire de $\ker(\varphi)$ dans $\mathbb{K}^p$. Par le théorème du rang, H est de dimension r. On considère $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H et $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\ker(\varphi)$ de sorte que

$$\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$$

est une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à $H \oplus \ker(\varphi)$.

Intéressons-nous maintenant à l'espace d'arrivée, $\mathbb{K}^n$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ en est un sev de dimension r, et on sait par la version géométrique du théorème du rang que φ réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Comme un isomorphisme envoie les bases sur les bases, une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r))$. On peut aussi considérer S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(\varphi)$ dans $\mathbb{K}^n$ (n'importe lequel, on sait qu'il en existe un et qu'il est de dimension $n - r$) et $(f_1, \dots, f_{n-r})$ une base de S. Finalement, la base

$$\mathcal{F} := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r), f_1, \dots, f_{n-r})$$

est une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus S$.

Par construction, $(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ vaut la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, matrice diagonale, dont la diagonale est composée de r 1 puis $(n-r)$ 0. Par ailleurs, la matrice qui représente φ dans les bases canoniques est A, donc si l'on considère les matrices de passage $P := P_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Can}_p}$ et $Q := P_{\mathcal{F}}^{\mathrm{Can}_n}$, on a

$$A = Q^{-1} J_r P \qquad \text{et donc} \qquad A^T = P^T J_r^T \left(Q^{-1}\right)^T = P^T J_r \left(Q^{-1}\right)^T \quad (\text{car } J_r^T = J_r)$$

Les deux matrices A et A^T ont donc même rang, à savoir r, puisque J_r est de rang r, et que les matrices $P, P^T, Q^{-1}, (Q^{-1})^T$, étant inversibles, ne changent pas le rang. □